数理解析研究所講究録
465巻 1982年 7-23

Index of Reducibility of Parameter Ideals of a Local Ring, II

日本大学文理学部　後藤四郎
静岡薬科大学　鈴木直義

§0. 序.

第3回可換環論セミナー（1981年11月4日～7日）に於て，表記題名の準備中の論文を紹介する講演をしました。その直後に、いくつかの本質的な発展がありました。それらを中心に、今回の研究集会で，3回に渡り講演させていただき、参加諸氏から、率直な御発言をいただきました。本論に入る前に，長時間の講演に熱心に付合い、講演者にとって、貴重な御意見、御助言をいただきましたことに、深く感謝いたします．本稿では、講演の全内容を詳述することはできませんので [0] を読んでいただくこととして、又上述の可換環セミナー報告集に書いたことは省略させていただき，その続きとして、そこの付記に述べた事項について説明させていただきます．

尚、今回の研究集会では、この講演に関連して、「可約指数について」と題して、青山陽一氏が、歴史的な背景として、沢山の文献をしらべあげた結果を報告されました。Gorenstein環ないしは、Cohen-Macaulay環が可換環論の中で、徐々に一定の位置を占め始めた時期に、idealの既約性をめぐる議論がどのようにからんでいるかを知る上で，非常に参考になりました。

以下、特にことわらないかぎり、$(A, \mathfrak{m})$ は Noetherian 局所環とします。

§1. quasi-Buchsbaum加群のIndex of reducibilityについて

(1.1) 定義. $\mathfrak{a}$ を A の $\mathfrak{m}$-primary ideal, M を有限生成 A-加群とする. $\mathfrak{a}$ の M での Index of reducibility を次のように定義する。

$$N_A(\mathfrak{a}; M) := \mathrm{dimension}_{A/\mathfrak{m}}((\mathfrak{a}M :_M \mathfrak{m})/\mathfrak{a}M),$$

即ち，A-加群 $M/\mathfrak{a}M$ の socle の次元である. socle の次元はしばしば登場するので, $\mathcal{V}(\ )$ であらわすことにする.

我々の主な目的は，$\mathfrak{a}$ として，M の parameter ideal $\mathfrak{q}$

(つまり、最小生成系の個数 $\mu_A(\mathfrak{q})$ が M の次元に一致する ideal $\mathfrak{q}$ で $l_A(M/\mathfrak{q}M)<\infty$ となるもの) について、$N_A(\mathfrak{q};M)$ の上限が有限な値をもつか否かである。そこで、さらに次の定義をする: $\mathrm{r}_A(M):=\sup\{\gamma(M/\mathfrak{q}M)\,;\,\mathfrak{q}$ は M の parameter ideal$\}$.

又、より一般に、$n\geq \dim M$ に対して、

$\mathrm{r}_n(M):=\sup\{\gamma(M/N)\,;\,N$ は M の部分加群で, $\mu_A(N)\leq n$ かつ $l_A(M/N)<\infty\}$.

既に [1] で述べた結果の主なものをまとめると次のようになる。

(1.2) <u>定理</u> (i) ((1.3)[1]). $\dim M=1$ のとき, $\sup_n(\mathrm{r}_n(M))<\infty$. 従って、特に、$\dim A=1$ ならば $\mathrm{r}(A)<\infty$.

(ii) ((1.2)[1]). $\dim M=2$ とすると, 任意の n に対して, $\mathrm{r}_n(M)<\infty$. 特に, $\dim A=2$ ならば $\mathrm{r}(A)<\infty$.

(iii) ((1.8)[1]). $\dim A=3$ で $\hat{A}$ が (S_2) を満すときは, $\mathrm{r}(A)<\infty$.

(1.3) <u>定理</u> ((1.5)[1]). 有限生成 A-加群 M が, 有限生成な local cohomologies をもつとする. (i.e., $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ は有限生成, $\forall i<\dim(M)$).

すると, $\mathrm{r}(M)\leq \sum_{i=0}^{d-1}\binom{d}{i}h^i(M)+\mu_{\hat{A}}(K_{\hat{M}})$.

ここで, $h^i(M):=l_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M))$, $K_{\hat{M}}:=\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(H^d_{\mathfrak{m}}(M),E_A(A/\mathfrak{m}))$ かつ $d=\dim M$ とする。

以上の結果をふまえて，以下新たに証明された事実を述べることにする。まず，(1.3) は次のようなより精密な評価に発展した。

(1.4) 定理．有限生成 A－加群 M が有限生成な local cohomologies をもつとき，（$d = \dim M$ として）

$$r_A(M) \geq \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} \gamma(H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

従って，$\gamma(H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = \mu_A(K_M)$ に注意すると，もし任意の $i < \dim M$ に対して，

$$\mathfrak{m} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$$

が成立するときは，

$$r_A(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d}{i} h^i(M) + \mu_A(K_M).$$

この証明は，$\dim M$ に関する帰納法による。その際次の2つの重要な事実を援用する。

(1.5) Proposition．(c.f. (1.6) [1])．M が有限生成 A－加群で，$d = \dim M > 0$，a を M-regular element とする．すると十分大なる全ての n に対して，

$$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H^i_{\mathfrak{m}}(M/a^nM)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M))$$

は、$\forall i \geqq 1$ について、surjective である。

特に、Mが有限生成な local cohomologies をもつ場合は、

$$\gamma(H^i_{\mathfrak{m}}(M/a^nM)) = \gamma(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) + \gamma(H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M)),$$

$i = 1, 2, \cdots, d-1$, $\forall n \gg 0$. (aは必ずしもM-regularで

<u>(注意)</u> (1.5)の第2の主張は、必ずしも、有限生成 local cohomologies をもつ加群でなくとも成立するように思える。

(1.6) <u>Proposition</u>. Mを有限生成な local cohomologies をもつ有限生成 A-加群とする。 $d = \dim M \geqq 1$, a を M の parameter (i.e., $\dim M/aM < \dim M$ となる A の元) とすると、十分大なる $n \geqq 0$ に対して、

$$\gamma(M/a^nM) = \gamma(M) + \gamma(H^1_{\mathfrak{m}}(M))$$

が成立する。

<u>(1.5)の略証</u>. $a_1 = a, a_2, \cdots, a_d$ を M の s.o.p. として、$\underline{a}^\nu = \{a_1^\nu, \cdots, a_d^\nu\}$ とすると、

$$\varinjlim_{\nu} H^i(\underline{a}^\nu; M) = H^i_{\mathfrak{m}}(M),$$

ただし、$H^i(\underline{a}^\nu; M) = H_{d-i}(\underline{a}^\nu; M)$ は、$\underline{a}^\nu$ で生成された M 上の Koszul homology である。

$n \gg 0$ とすると，各 $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ の socle は $H^i(\underline{a}^n;M)$ の socle の limit map による image となるように出来る．かかる n に対して，$x_i = a_i^n$ $(i=1,\cdots,d)$ とする．次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^i(\underline{x};M) \arrow[r] \arrow[d] & H^i(\underline{x} : M/x_1M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & H^{i+1}(\underline{x};M) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \quad :\text{exact} \\
\arrow[r] & H^i_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[r] & H^i_{\mathfrak{m}}(M/x_1M) \arrow[r] & H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[r, "x_1"] & \quad :\text{exact}
\end{tikzcd}
$$

我々の主張の証明には，$H^{i+1}(\underline{x}:M)$ の socle が δ により $H^i(\underline{x}:M/x_1M)$ の socle から写ってくることを示せば十分である．$x_1 = a_1^n$ が M-regular であることから，次の lemma により δ は split することになり，証明は完了する．

(1.7) <u>Lemma</u>. M が有限生成 A-加群，$\underline{x} = \{x_1,\cdots,x_r\}$ を A の要素の系列とする．特に，x_1 は M-regular とする．すると，次の完全系列は split する．

$$0 \longrightarrow H_p(\underline{x};M) \longrightarrow H_p(\underline{x};M/x_1M) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(\underline{x};M) \longrightarrow 0.$$

<u>証明</u>. まず，$K.(x_2,\cdots,x_d;M)$ の differential map を $e.$ であらわすと，$K_p(x_1,\cdots,x_r;M) = K_{p-1}(x_2,\cdots,x_r;M) \oplus K_p(x_2,\cdots,x_r;M)$ で，$K.(x_1,\cdots,x_r:M)$ の differential map $d.$ は，

$(u,v) \in K_p(\underline{x};M) = K_{p-1}(x_2,\cdots,x_r;M) \oplus K_p(x_2,\cdots,x_r;M)$ に対して,

$$d_p(u,v) = (-e_{p-1}(u),\ x_1u + e_p(v))$$

で与えられることに注意する. M のかわりに M/x_1M について考える場合, differential map は $\bar{e}$. であらわし, $(u,v) \in K_p(\underline{x};M)$ の $K_p(\underline{x};M/x_1M)$ での image は $(\bar{u},\bar{v})$ 等であらわすこととする.

まず, connecting homomorphism を具体的に表わす. $(\bar{u},\bar{v}) \in Z_p(\underline{x};M/x_1M)$ に対して, $[\bar{u},\bar{v}]$ でその homology class をあらわすことにすると,

$$\delta([\bar{u},\bar{v}]) = [s,t]:$$

ただし, $(s,t) \in Z_{p-1}(\underline{x};M)$ は, $(\bar{u},\bar{v})$ の cycle conditions

$$-e_{p-1}(u) = x_1 s,$$

$$x_1u + e_p(v) = x_1 t$$

により決る. 一方, x_1 が M/x_1M を消すことから

$$H_p(x_1,\cdots,x_r;M/x_1M) = H_{p-1}(x_2,\cdots,x_r;M/x_1M) \oplus H_p(x_2,\cdots,x_r;M/x_1M)$$

であり, 実は, さらに, 次の同型が存在する:

$$\lambda: H_{p-1}(x_2,\cdots,x_r;M/x_1M) \longrightarrow H_{p-1}(x_1,x_2,\cdots,x_r;M).$$

実際, まず, $\bar{\beta} \in Z_{p-1}(x_2,\cdots,x_r;M/x_1M)$ に対して, $-\bar{e}_{p-1}(\bar{\beta}) = 0$ だから,

$$e_{p-1}(\beta) = x_1\alpha \in x_1K_{p-2}(x_2,\cdots,x_r;M).$$

すると, $x_1(-\alpha) + e_{p-1}(\beta) = 0$. さらに,

$$x_1 e_{p-2}(\alpha) = e_{p-2}(x_1\alpha) = e_{p-2}\circ e_{p-1}(\beta) = 0.$$

x_1 は M-regular で $e_{p-2}(\alpha) \in K_{p-3}(x_2,\dots,x_r;M) \cong M^{\binom{r}{p-3}}$ だから

$e_{p-2}(\alpha)=0$ を得る.（ただし, $p=2$ の場合は, 無条件に $e_{p-2}(\alpha)=0$）.

従って, $(-\alpha,\beta)\in Z_{p-1}(x_1,\dots,x_r;M)$. 従って,

$$\lambda([\bar\beta]) = [-\alpha,\beta] \in H_{p-1}(x_1,\dots,x_r;M)$$

とする. <u>Well-defined であること</u>: $\bar\beta = \bar e_p(\bar\gamma)$ $(\exists\gamma\in K_p(x_2,\dots,x_r;M))$

とすると, $\beta - e_p(\gamma) = x_1\mu \in x_1K_{p-1}(x_2,\dots,x_r;M)$, 又,

$$x_1\alpha = e_{p-1}(\beta) = x_1 e_{p-1}(\mu).$$

x_1 が M-regular だから $\alpha=e_{p-1}(\mu)$. 従って, $(-\alpha,\beta)=d_p(\mu,\gamma)$.

<u>λ は injective である</u>: $(-\alpha,\beta)=d_p(\mu,\gamma)$ とすると,

$-\alpha=-e_{p-1}(\mu)$, $x_1\mu+e_p(\gamma)=\beta$. 従って, 特に, $\bar\beta=\bar e_p(\bar\gamma)$.

<u>λ は surjective である</u>: $(\alpha,\beta)\in Z_{p-1}(x_1,\dots,x_r;M)$ に対して,

$x_1\alpha + e_{p-1}(\beta)$. 従って, $\bar\beta \in Z_{p-1}(x_2,\dots,x_r;M/x_1M)$.

λ の定義から, $\lambda[\bar\beta]=[\alpha,\beta]$.

最後に, λ は, 下の図式を可換にする:

$$\begin{tikzcd}
H_p(\underline{x};M/x_1M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H_{p-1}(\underline{x};M) \\
H_{p-1}(x_2,\dots,x_d;M/x_1M) \oplus H_p(x_2,\dots,x_d;M/x_1M) & \\
H_{p-1}(x_2,\dots,x_d;M/x_1M) \arrow[u, hook] \arrow[uur, "\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

実際, $[\bar\beta] \in H_{p-1}(x_2,\cdots,x_r; M/x_1M)$ に対して, $([\bar\beta],[\bar 0]) = [\bar\beta, \bar 0]$.

$-e_{p-1}(\beta) = x_1 s$

$x_1\beta + e_p(0) = x_1 t$

とおくと, $e_{p-1}(\beta) = x_1\alpha$ より, $-x_1\alpha = x_1 s$ で $-\alpha = s$. 又, $x_1\beta = x_1 t$ より $\beta = t$ を得る. かくて,

$$\delta([\bar\beta,\bar 0]) = [s, t] = [-\alpha, \beta] = \lambda[\bar\beta]. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

次に, (1.6) の証明に移るが, 本質的な部分は, [3] の proposition (3.1) の証明の修正である.

(1.6)の証明. まず, a の適当な巾を考えることにより,

$$(0 :_M a) = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$$

としてよい。 $\forall n \geq 2$ に対して, 次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[r] & M/a^nM \arrow[r, "\pi"] & M/(a^nM + H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \arrow[r] & 0 \\
& & & M/(aM + H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \arrow[u, "i"] \arrow[ul, "j"] &
\end{tikzcd}$$

ここで, i と j はそれぞれ次のように定義する.

$$i(\alpha \bmod aM + H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = a^{n-1}\alpha \bmod a^nM + H^0_{\mathfrak{m}}(M),$$

$$j(\alpha \bmod aM + H^0_{\mathfrak{m}}(M)) = a^{n-1}\alpha \bmod a^nM.$$

$\forall m \geq 1$ に対して, $(0 :_M a^m) = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ だから i が injective

なることは容易に検証される．　$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, *)$ を作用させると，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H^0_\mathfrak{m}(M)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M/a^mM) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M/(a^mM+H^0_\mathfrak{m}(M))) \\
& & & \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M/(aM+H^0_\mathfrak{m}(M))) \arrow[ul, "\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m},\, j)"] \arrow[u, tail, "\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m},\, i)"']
\end{tikzcd}$$

$\forall m \geq 1$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, M/(a^mM+H^0_\mathfrak{m}(M))) \cong \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H^1_\mathfrak{m}(M))$$

が成立することを示せば，所期の事実の全てが証明される．

完全系列

$$0 \longrightarrow M/H^0_\mathfrak{m}(M) \xrightarrow{a^m} M/H^0_\mathfrak{m}(M) \longrightarrow M/(a^mM+H^0_\mathfrak{m}(M)) \longrightarrow 0$$

より，次の完全系列を得る：

$$0 \longrightarrow H^0_\mathfrak{m}(M/(a^mM+H^0_\mathfrak{m}(M))) \longrightarrow H^1_\mathfrak{m}(M/H^0_\mathfrak{m}(M)) \xrightarrow{a^m} H^1_\mathfrak{m}(M/H^0_\mathfrak{m}(M)) .$$

これに $\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, *)$ を作用させると，同型

$$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H^0_\mathfrak{m}(M/(a^mM+H^0_\mathfrak{m}(M)))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, H^1_\mathfrak{m}(M/H^0_\mathfrak{m}(M)))$$

を得る．$H^1_\mathfrak{m}(M/H^0_\mathfrak{m}(M)) \cong H^1_\mathfrak{m}(M)$ に注意すると必要な同型を得たことになる．　(Q.E.D.)

(1.8) 注意．　よく知られているように，Buchsbaum module M については，

(#)　$\mathfrak{m}H^i_\mathfrak{m}(M)=0$　for $\forall i \neq \dim M$

が成立する．もちろん，(#) を満しながら Buchsbaum ではない環（加群）は十分沢山存在する(例えば［T］例 1.4. p.61).

かかる加群は、次に述べるようなはっきりした特徴付けがある.

(1.9) 定理+定義. ([8] 又は [5])　M を有限生成 A-加群とすると, 次の条件は同値である.

(i) $\forall i \neq \dim M$ に対して, $\mathfrak{m} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$

(ii) $\mathfrak{m}^2$ に含まれる, M の s.o.p. は全て, weak M-sequence をなす.

(iii) $\mathfrak{m}^2$ に含まれる長さが $\dim M$ の weak M-sequence が存在する.

上記の同値条件を満す加群を quasi-Buchsbaum 加群と呼ぶこととする. 環 A が A-加群として, quasi-Buchsbaum 加群のときに A を quasi-Buchsbaum 環と呼ぶ.

§2. 3次元の局所環 A の $\mathcal{I}(A)$ について.

既に [1] で, $\forall d \geq 4$ に対して, $\dim A = d$ で, $\mathcal{I}(A) = \infty$ となる環 A の例の構成法を述べた。 従って, 本節では, まだ未解決のままであった, 一般の3次元の局所環 A に対する $\mathcal{I}(A) < \infty$ の証明を与える。 即ち,

(2.1) 定理. $(A, \mathfrak{m})$ が 3次元の Noetherian 局所環 ならば $\mathcal{I}(A) < \infty$.

まず次の Lemma から始める.

(2.2) <u>Lemma</u>. C を有限生成 A-加群で $\dim C = 2$ とすると,
$\sup\{\gamma(D)$; D は $H_1(a,b;C)$ の homomorphic image で, a, b は C の s.o.p.$\} < \infty$.

<u>証明</u> A は complete としてよい。 $U = U_C(0)$ を (0) の C の中での準素分解の, 次元が 2 の成分とする, (即ち, $\dim C/U = 2$ かつ C/U は unmixed.). このとき, C/U は, 有限生成な local cohomologies を持つ. 又, $\dim U \leq 1$. a, b を C の s.o.p. とする. 完全系列

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow C \longrightarrow C/U \longrightarrow 0$$

より, a, b に関する Koszul homology の exact sequence を得る:

$$H_1(a,b;U) \longrightarrow H_1(a,b;C) \xrightarrow{\ \pi\ } H_1(a,b;C/U) \longrightarrow .$$

D を $H_1(a,b;C)$ の任意の homomorphic image とする. 適当な D'', D' により, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
 & H_1(a,b;U) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(a,b;C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im}(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'' \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\gamma(D)$ を上からおさえるには，$\gamma(D')$ と $\gamma(D'')$ とをおさえれば十分である．まず，$\mathrm{Im}(\pi) \subset H_1(a,b;C/U)$ だから，

$$\gamma(D') \leqq \ell_A(\mathrm{Im}(\pi)) \leqq \ell_A(H_1(a,b;C/U)) \leqq 2h^0(C/U)+h^1(C/U).$$

一方，$Z_1(a,b;U) \subset U^{(2)}$ だから D'' は，$U^{(2)}$ の homomorphic image $U^{(2)}/E$ の submodule となる．$\dim U \leqq 1$ だから，(1.2)(i) を適用して，$\gamma(D'') \leqq \gamma(U^{(2)}/E)$ となる．　(Q.E.D.)

上の証明の最後の部分は，結局，一般に，次のことを主張することとなる．

(2.3) <u>Lemma</u>.　N が有限生成 A-加群で，$\dim N=1$ とする．$a_1,\cdots,a_r$ を任意の A の要素とする．D が $H_k(a_1,\cdots,a_r;N)$ の任意の homomorphic image とすると，$\gamma(D)$ には，$a_1,\cdots,a_r$ には依らない（r と k のみに依る）上限が存在する．

では，本節の目標である (2.1) の証明を始める．
A は complete としてよい．$(0)=U\cap V$ を (0) の準素分解で，$\bar{A}=A/U$ は unmixed で3次元，$A'=A/V$ は次元が $\leqq 2$．
次の完全系列がある：

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A}\oplus A' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

ここで，$C = A/(U+V)$ で，dimension ≥ 2．さて，$\mathfrak{q}=(a,b,c)$ を A の parameter ideal とする．Koszul homology の完全系列がある．

$$H_1(\mathfrak{q};\bar{A}\oplus A') \longrightarrow H_1(\mathfrak{q};C) \xrightarrow{\ \delta\ } A/\mathfrak{q} \longrightarrow \bar{A}/\mathfrak{q}\bar{A} \oplus A'/\mathfrak{q}A' .$$

(1.2) (ii), (iii) により，

$$\gamma(\bar{A}/\mathfrak{q}\bar{A}) \leq r(\bar{A}) < \infty \quad \text{かつ}$$
$$\gamma(A'/\mathfrak{q}A') \geq r_3(A') < \infty .$$

従って，$\gamma(\mathrm{Im}\,\delta)$ が $\mathfrak{q}$ に依らない上限をもつことを示す．$\dim C \leq 1$ の場合は，(2.3) により，$\gamma(\mathrm{Im}\,\delta)$ に上限があることがわかる．そこで，$\dim C = 2$ の場合を考える．$D := \mathrm{Im}\,\delta$ とする．次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & & H_1(\mathfrak{q};\bar{A}\oplus A') \arrow[r] \arrow[d] & (0:c)_{\bar{A}\oplus A'/(a,b)(\bar{A}\oplus A')} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \dfrac{H_1(a,b;C)}{cH_1(a,b;C)} \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\mathfrak{q};C) \arrow[r] \arrow[d] & (0:c)_{C/(a,b)C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'' \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

a, b は C の s.o.p. としてよいから、(2.2) により、$r(D')$ は上限をもつ。一方、もし、$H_1(\mathfrak{q}; \bar{A} \oplus A')$ の最小生成系の個数に、$\mathfrak{q}$ に依らない上限があるとすると、D' は、C/E の submodule と見做せて、E の最小生成系の個数に、$\mathfrak{q}$ に依らない上限 n があることになり、

$$r(D') \leqq r(C/E) \leqq r\,n(C) < \infty .$$

従って、$H_1(\mathfrak{q}; \bar{A})$ と $H_1(\mathfrak{q}; A')$ の A-加群としての最小生成系の個数に、$\mathfrak{q}$ に依らない上限があることを示す。
さて、まず $\bar{A}$ は、3-dimensional unmixed だから [2] の結果より、次の完全系列が存在する。

$$0 \longrightarrow \bar{A} \xrightarrow{f} B \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

ここで、B は 3 次元 (S_2) 環、従って、有限生成な local cohomologies をもつ。又 $\dim F \leqq 1$ で、f は finite map.
$\mathfrak{q}$ に関する Koszul homology の完全系列を考える：

$$H_2(\mathfrak{q}; F) \xrightarrow{\lambda} H_1(\mathfrak{q}; \bar{A}) \xrightarrow{\pi} H_1(\mathfrak{q}; B) \quad .$$

まず、$\mu_A(\operatorname{Im}\pi) = l_A(\operatorname{Im}\pi / \mathfrak{m}(\operatorname{Im}\pi)) \leqq l_A(\operatorname{Im}\pi) \leqq l_A(H_1(\mathfrak{q}; B))$ で、右端は、B の local cohomologies の長さによって決る上限をもつ。

次に、$\operatorname{Im}\lambda$ について考える。まず $\dim F = 0$ のときは、

$$\mu_A(H_2(\mathfrak{q};F)) \leqq \ell_A(H_2(\mathfrak{q};F)) \leqq 3\,\ell_A(F).$$

$\dim F=1$ のときは, $\mu_A(\mathrm{Im}\,\lambda) = \gamma(\mathrm{Im}\,\lambda/\mathfrak{m}(\mathrm{Im}\,\lambda))$ で, (2.3)を使える. かくて, $\mu_A(H_1(\mathfrak{q};\bar{A}))$ は $\mathfrak{q}$ によらない上限をもつ.

最後に, $\dim A'=2$ の場合, $H_1(\mathfrak{q};A')$ の最小生成系の個数の上限をみつける. ($\dim A'\leqq 1$ の場合は, (2.3)を使って直ちに出る.) しかるに, このとき, A' は uniformly coherent であるので, $\mu_{A'}(\mathrm{Ker}(A'^p \longrightarrow A'))$ には, p のみによって決る上限があり, ([4]の 8.3 (p.23), 2.2 (p.53) を参照), 特に,

$$Z_1(\mathfrak{q};A') = \mathrm{Ker}(A'^3 \longrightarrow A')$$

だから, $\mu_A(H_1(\mathfrak{q};A')) \leqq \mu_A(Z_1(\mathfrak{q};A'))$ より, 全ての要求は満足されて, 証明は完了する.

以上, 概略ながら, $I(A)$ の有限性について, 最新の結果を述べて来ました。もちろん, $I(A)<\infty$ となる環の完全な特徴付けや, さらに, constant な index of reducibility をもつような環の特徴付け等, 今後解決すべき問題は沢山あります. それらについても, 継続して, 研究を続けるつもりでおります。

(1982年3月)

REFERENCES

[0] S. Goto and N. Suzuki, "Index of reducibility of parameter ideals of a local ring." in preparation.

[1] 後藤=鈴木 "Index of reducibility of parameter ideals of a local ring." 第3回可換環セミナー報告集(1981)pp. 187-197.

[2] Y. Aoyama, "Some basic results on canonical modules." preprint.

[3] S. Goto, "Approximately C.-M. rings." to appear in J. of Algebra.

[4] J.D. Sally, "Numbers of generators of ideals in local rings." Lect. notes in pure and applied mathematics vol. 35(1978) Dekker.

[5] N. Suzuki,"On the system of parameters for Buchsbaum modules and the generalized modules." 第2回可換環論シンポジウム報告集(1980) pp. 165-178.

[6] S. Goto,"Every Noetherian uniformly coherent ring has dimension at most 2." preprint.

[7] 後藤四郎, "Buchsbaum 局所環について" 数理解析研究所講究録 374 「可換環論の研究」 1980年 2月.

[8] J.Stückrad, P. Schenzel und W.Vogel, "Theory der Buchsbaum-Moduln." Preprint der Sektion Mathematik Nr.23/24, Martin-Luthar-Univ.